UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Segundo Examen 25/02/2026

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas con el procedimiento analítico adecuado para ser tenida en cuenta. No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas.

Condición de aprobación (6 puntos): 50% del examen correctamente resuelto. (uno de T1 o T2 y dos P1, P2, P3 o P4)

T1) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsa. **Justifique sus respuestas.**

a) La circulación del campo $f(x,y) = (\cos(x^2) + y^2, \sin(y^4) + 2xy)$ a lo largo de cualquier circunferencia de radio 4 es nula

b) El volumen del sólido $V = \{(x,y,z) \epsilon R^3 / y \le x^2 + z^2 \le 4 \wedge y \ge 1\}$ es el valor $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left[\int_0^{\rho^2} \rho\, dy\right] dr\right] d\theta$

T2) a) Enuncie el teorema de cambio de variable en el cálculo de un integral doble (polares), con las hipótesis correspondientes.

b) Determine analítica y gráficamente la región de integración en el plano (xy) de la integral expresada por $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta)}} \rho^2 \cos(\theta)\, d\rho\right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^2 \rho^2 \cos(\theta)\, d\rho\right] d\theta$. Luego plantee la integral dada en coordenadas cartesianas (NO calcule las integrales).

P1) Calcular la integral de línea si $F: R^2 \to R^2$ el campo $F(x,y) = (3x^2 + 2y, e^y + x)$ a lo largo de curva parametrizada por $\alpha(t) = (2\cos(t); 2\sin(t))$ para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

P2) Sea $F: R^3 \to R^3$ el campo $F(x,y,z) = (z - \cos(x^2), \sin(y), y + e^z)$ y $C = \{(x,y,z) \in R^3: x^2 + y^2 = 1 ; y + z = 1\}$ orientada en contra de las agujas de reloj desde el semieje positivo z. Calcule la circulación del campo.

P3) Sea $F: R^3 \to R^3$ el campo $F(x,y,z) = (y^2z^2; x^2z^2; 2z + 2xy)$ y S la superficie determinada por $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \ge 0$ y orientada con vectores normales con tercera coordenada negativa. Hallar el flujo de F a través de S.

P4) Hallar $g(x)$ sabiendo que $g \in C^2$, $\bar{f}(0,1) = (2,-1)$ y $g(0) = 3$ y $\bar{f}(x,y) = (yg'(x), e^{2x} - g'(x))$ sea conservativo.

AM 2	2º parcial - Curso de verano (Lezcano)	HOJA Nº 1/3 FECHA 25-2-26

T1 V o F

a) La circ. de $\bar{f}(x,y) = (\cos(x^2)+y^2,\ \operatorname{sen}(y)+2xy)$ a lo largo de cualquier circunferencia de radio 4 es nula.

$\operatorname{dom}(\bar{f}) = \mathbb{R}^2$ ✓ $\quad \bar{f} = (P,Q) \in C^1$ (P, Q funciones elementales)

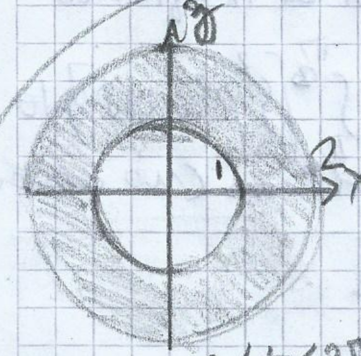
¿$P'_y = Q'_x$? $\quad P'_y = 2y$, $\quad Q'_x = 2y$ $\} = $ ✓ $\quad \bar{f}$ es campo conservativo

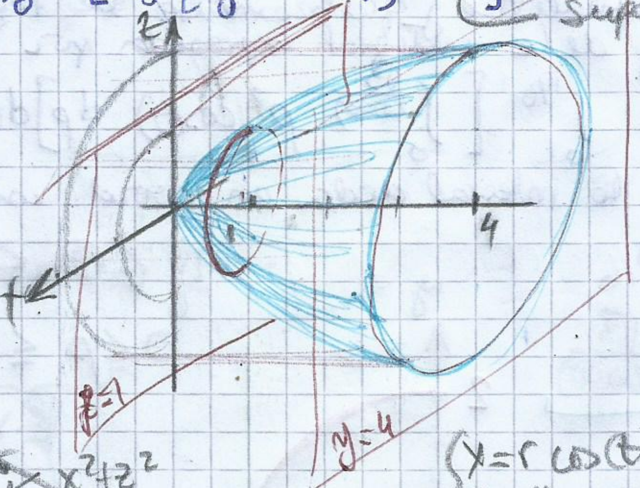
$\therefore \oint_C \bar{f}\, d\bar{l} = 0$

V

b) El vol. del sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y \le x^2+z^2 \le 4,\ y \ge 1\}$ es el valor de

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2}\left[\int_0^{\rho^2} \rho\, dy\right] dr\right] d\theta$$ ← supongo que es ρ





F

$0 \le t \le 2\pi$

$1 \le r \le 2$ ← x^2+z^2

$1 \le y \le r^2$

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = y \\ z = r\operatorname{sen}(t) \end{cases}$

S/enunciado $\quad 0 \le t \le 2\pi$ ✓

$0 \le r \le 2$ F

$0 \le y \le r^2$ F

NOTA

(resuelto por Sylvina)

#2 a) Enunciar el teorema de cambio de variables en el cálculo de una integral doble (polares) con las hipótesis correspondientes.

Sean D y D^* dos regiones elementales del plano y

$$T: D^* \to D \;/\; T(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v))$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(T(r,t))\cdot |J|\,dr\,dt$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases} \to J = \begin{pmatrix} \cos(t) & -r\,\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & r\cos(t) \end{pmatrix} \to |J| = r\cos^2(t) + r\,\text{sen}^2(t)$$

$$|J| = r\underbrace{(\cos^2(t)+\text{sen}^2(t))}_{1}$$

$$|J| = r$$

b) Determinar analítica y gráficamente la región de integración en el plano xy de la integral expresada por

$$\int_0^{\pi/6}\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta)}} \rho^2\cos(\theta)\,d\rho\right]d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\int_0^{2} \rho^2\cos(\theta)\,d\rho\right]d\theta$$

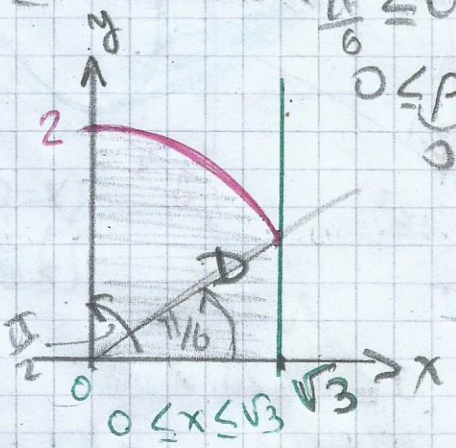
Luego plantear la integral dada en coord. cartesianas (no calcular)

$$0 \le \theta \le \pi/6 \qquad\qquad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \rho \le \frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta)} \qquad\qquad \underbrace{0 \le \rho \le 2}_{0 \le x^2+y^2 \le 4}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta)}$$

$$\underbrace{\rho\cos(\theta)}_{x} = \sqrt{3}$$



$$\rho^2\cos(\theta) = \overset{\text{Jac.}}{\rho}\cdot\underbrace{\rho\cos(\theta)}_{x}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \le 4,\; y \ge 0,\; 0 \le x \le \sqrt{3}\}$$

$$y \ge 0 \quad y = \sqrt{4-x^2}$$

$$\boxed{I = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\;dy\;dx}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2	2° parcial - curso de verano (Lezcano)	HOJA N°: 2/3 FECHA 25-2-26

P1) Calcular la integral de línea si $\overline{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el campo $\overline{F}(x,y)=(3x^2+2y,\, e^y+x)$ a lo largo de la curva parametrizada por $\overline{\alpha}(t)=(2\cos(t),\, 2\,\mathrm{sen}(t))$, para $t\in[-\pi/2, \pi/2]$

$$\int_C \overline{f}\,d\overline{l} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{f}(\overline{\alpha}(t))\cdot\overline{\alpha}'(t)\,dt =$$

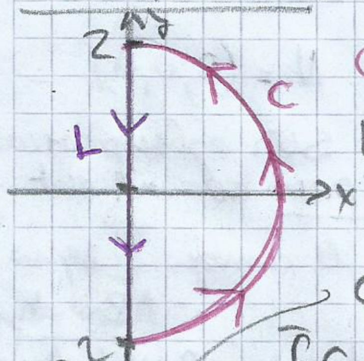
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(3\cdot 4\cos^2(t) + 4\,\mathrm{sen}(t);\, e^{2\,\mathrm{sen}(t)} + 2\cos(t)\right)\left(-2\,\mathrm{sen}(t),\, 2\cos(t)\right)dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -24\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t) - 8\overbrace{\mathrm{sen}^2(t)}^{1-\cos^2(t)} + 2\cos(t)\,e^{2\,\mathrm{sen}(t)} + 4\cos^2(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -24\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t) - 8 + 8\cos^2(t) + 2\cos(t)\,e^{2\,\mathrm{sen}(t)} + 4\cos^2(t)\,dt =$$

$$\boxed{\int_C \overline{f}\,d\overline{l} = 0{,}9705}$$

Otra forma:



$C: \overline{\alpha}(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t))$ $\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$L: \overline{\beta}(t) = (0, -t)$ $\quad t\in[-2, 2]$

$\beta'(t) = (0, -1)$

$C\cup L$ es curva cerrada frontera de D (compacto)

$\overline{f}\in C^1 \Rightarrow$ T. Green: $\oint_{C\cup L} \overline{f}\,d\overline{l} = \iint_D Q'_x - P'_y\,dx\,dy =$

$$\underbrace{\oint_{C\cup L} \overline{f}\,d\overline{l}}_{-2\pi} = \int_C \overline{f}\,dl + \int_L \overline{f}\,d\overline{l}$$

$$= \iint_D 1-2\,dxdy = -\overbrace{\boxed{\iint_D dxdy}}^{A_D} = -\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = -\frac{4\pi}{2}$$

$$\int_L \overline{f}\,d\overline{l} = \int_{-2}^{2} \overline{f}(\overline{\beta}(t))\,\overline{\beta}'(t)\,dt = \int_{-2}^{2} (-2t, e^{-t})(0,-1)\,dt = \int_{-2}^{2} -e^{-t}\,dt =$$

$$= e^{-t}\Big|_{-2}^{2} = e^{-2} - e^{2}$$

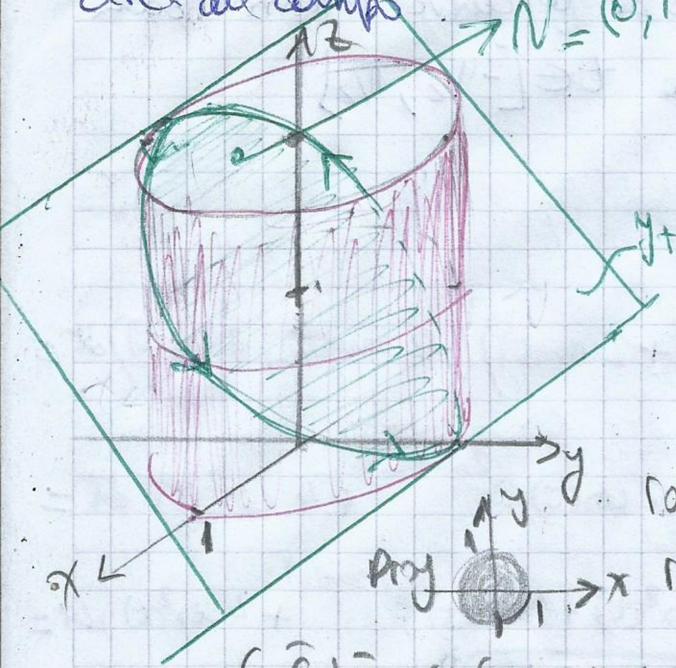
$$\boxed{\int_C \overline{f}\,d\overline{l} = -2\pi - e^{-2} + e^{2}} \cong 0{,}9705$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

(P2) Sea $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el campo $\bar{F}(x,y,z)=(\overbrace{z-\cos(x^2)}^{P},\overbrace{\text{sen}(y)}^{Q},\overbrace{y+e^z}^{R})$ y $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2=1,\ y+z=1\}$ orientada en contra de las agujas del reloj desde el semieje positivo z. Calcular la circ. del campo

$N=(0,1,1)$



C curva suave y cerrada

S sup orientable cuyo borde es C

$\bar{f}=(P,Q,R)\in C^1$ (componentes func. elementales)

$$\Rightarrow \oint_{C^+}\bar{f}\,d\bar{l}=\iint_S \text{rot}(\bar{F})\,d\bar{s}=\iint_{S_{xy}}\text{rot}(\bar{F})\,N\,dx\,dy$$

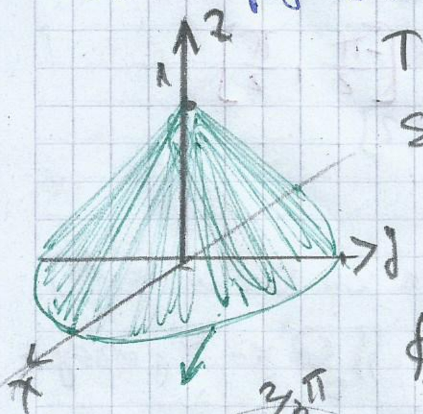
$$\text{rot}(\bar{F})=(R'_y-Q'_z,\ P'_z-R'_x,\ Q'_x-P'_y)$$

Proy

$$\text{rot}(\bar{F})=(0,1,0)$$

$$\oint_{C^+}\bar{f}\,d\bar{l}=\iint_{S_{xy}}(0,1,0)\,(0,1,1)\,dx\,dy=\boxed{\overbrace{\iint_{S_{xy}}dx\,dy}^{\text{Area}_D}}=\boxed{\pi=\oint_{C^+}\bar{f}\,d\bar{l}}$$ ✓

(P3) Sea $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ / $\bar{F}(x,y,z)=(y^2z^2,\ x^2z^2,\ 2z+2xy)$ y $S: z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ con $z\geq 0$ orientada con vectores normales con tercera comp. negativa. Hallar el flujo de $\bar{F}$ a través de S



T: tapa en $z=0$ círculo $r=1$ $N=(0,0,-1)$

Si S la oriento hacia arriba $\Rightarrow$ $S\cup T$ es sup cerrada orientada al ext

Uso T. Gauss y después le cambio el signo

$$\oiint_{S\cup T}\bar{F}\,d\bar{s}=\iiint_W \text{div}(\bar{F})\,dv=\iiint_W 2\,dx\,dy\,dz=2\,\overbrace{\text{Vol}}^{\text{A.Base}\times h/3}$$

$$S\cup T\to \overbrace{\oiint_{S\cup T}\bar{f}\,d\bar{s}}^{2/3\pi}=\iint_S\bar{f}\,d\bar{s}+\underbrace{\iint_T\bar{f}\,d\bar{s}}_{0}$$

$$\oiint_{S\cup T}\bar{F}\,d\bar{s}=\frac{2\pi 1^2 1}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

$$\iint_T\bar{F}\,d\bar{s}\overset{\text{en } z=0}{=}\iint_{T_{xy}}(0,0,2xy)\,(0,0,-1)\,dx\,dy=\iint_{T_{xy}}-2xy\,dx\,dy\overset{\text{por simetría en x e y integrando x e y}}{=}0$$

$$\boxed{\iint_S\bar{F}\,d\bar{s}=-\frac{2}{3}\pi}$$ ✓

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2 | 2° parcial - curso verano (Lezcano) | HOJA N° 3/3 | FECHA 25-2-26

(P4) Hallar $g(x)$ sabiendo que $g \in C^2$, $\bar{f}(0,1) = (2,-1)$ y $g(0) = 3$ para que $\bar{f}(x,y) = (y\, g'(x),\ e^{2x} - g'(x))$ sea conservativo.

$$\bar{f}(0,1) = (2,-1) = (\underbrace{g'(0)}_{2},\ \underbrace{1 - g'(0)}_{-1}) \rightarrow \boxed{g'(0) = 2} \quad \boxed{g(0) = 3}$$

$\bar{f} = (P, Q)$

Para que $\bar{f}$ sea conserv. necesito que $P'_y = Q'_x$

$$\begin{cases} P'_y = g'(x) \\ Q'_x = 2e^{2x} - g''(x) \end{cases} \rightarrow 2e^{2x} - g''(x) = g'(x)$$

$$g''(x) + g'(x) = 2e^{2x}$$

SH) $r^2 + r = 0 \rightarrow \begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{matrix}$ $\quad \boxed{g_H = A + Be^{-x}}$

$A, B \in \mathbb{R}$

SP) $g_p = C e^{2x} \Rightarrow g'_p = 2Ce^{2x} \rightarrow g''_p = 4Ce^{2x}$

$C \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $4C\cancel{e^{2x}} + 2C\cancel{e^{2x}} = 2\cancel{e^{2x}}$

$$6C = 2 \rightarrow \boxed{C = 1/3} \quad \boxed{g_p = \frac{1}{3} e^{2x}}$$

$g(x) = A + Be^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x} \rightarrow g(0) = 3 = A + B + \frac{1}{3}$ $\quad \boxed{A = 4}$

$g'(x) = -Be^{-x} + \frac{2}{3} e^{2x} \rightarrow g'(0) = 2 = -B + \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{B = \frac{-4}{3}}$

$$\boxed{g(x) = 4 - \frac{4}{3} e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)